

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

Chương 1. Giới hạn và liên tục

Bài 1. Tính giới hạn

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3})$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 1}}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cotg \pi x}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^2} - \cos x}{x^2}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 5} \right)^{2x^2 + x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x^2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tg x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tg \frac{\pi x}{2}$

Bài 2. Vô cùng bé, vô cùng lớn

1. So sánh các VCB sau:

(a) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ và $g(x) = x^2$ khi $x \rightarrow 0$.

(b) $f(x) = x - 1$ và $g(x) = \cotg \frac{\pi x}{2}$ khi $x \rightarrow 1$.

(c) $f(x) = 1 - \cos^3 x$ và $g(x) = \ln(1 + \arcsin x)$ khi $x \rightarrow 0$.

2. So sánh các VCL $f(x) = e^x + e^{-x}$, $g(x) = e^x - e^{-x}$ khi

(a) $x \rightarrow +\infty$.

(b) $x \rightarrow -\infty$.

3. Hàm số $f(x) = x^x - 1$ có là VCB khi $x \rightarrow 0^+$ không?

Bài 3. Tìm phần chính

1. Tìm phần chính dạng Cx^α khi $x \rightarrow 0$ của VCB:

(a) $f(x) = \sqrt{1-2x} - 1 + x$.

(b) $f(x) = \tg x - \sin x$.

(c) $f(x) = e^{x^2} - \cos x$.

(d) $f(x) = 1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}$.

(e) $f(x) = \arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)$.

2. Tìm phần chính dạng $C(x-1)^\alpha$ khi $x \rightarrow 1$ của VCB:

(a) $f(x) = e^x - ex$.

(b) $f(x) = e^x - e$.

Bài 4. Xét tính liên tục

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{|x|} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} & \text{nếu } x > \pi \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq \pi \end{cases}$

7. Cho $f(x)$ là hàm liên tục tại x_0 . Chứng minh rằng $|f(x)|$ cũng liên tục tại x_0 .

Bài 5. Tìm và phân loại điểm gián đoạn

1. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \frac{1}{\ln |x|}$.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân

Bài 1. Tính đạo hàm

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(a) $y(x) = |(x-1)^2(x+1)|$.

(b) $y(x) = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \arctg x & \text{với } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{với } x < 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{nếu } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

2. Tính $y'(0)$ bằng định nghĩa. Biết:

$$y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2015)(x-2016)$$

3. Chứng minh rằng $f(x)$ có đạo hàm gián đoạn tại $x = 0$.
Biết:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

4. Tính $f'_+(0), f'_-(0)$ của: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

5. Tính $y'(x), y''(x)$ của hàm số cho dưới dạng tham số:

(a) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$

Bài 2. Xét tính khả vi

1. $y = (x+2)|x-1|$.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} & \text{nếu } x > 1 \\ \sin(x-1) & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{nếu } |x| \geq 1 \\ |x|-1 & \text{nếu } |x| < 1 \end{cases}$

5. Xét tính khả vi tại $x = 1$ của hàm số:

$$y(x) = \begin{cases} x^2 e^{1-x^2} & \text{nếu } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

6. Xét tính khả vi tại $x = 0$ của hàm số:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctg \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

7. Cho $\varphi(x)$ là hàm liên tục tại $x = a$. Xét tính khả vi tại $x = a$ của hàm số

$$f(x) = |x-a|\varphi(x)$$

8. Tìm a, b để hàm số sau khả vi trên \mathbb{R}

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{nếu } x < 2 \\ ax + b & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ ax + b & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

Bài 3. Tính gần đúng

1. $A = \sqrt{(2,037)^2 + 5}$

2. $C = \sin 29^\circ$

3. $D = \frac{1}{\sqrt[4]{0,983}}$

4. $F = e^{-0.03}$

Bài 4. Đạo hàm cấp cao

1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$.

(b) $f(x) = \ln \sqrt[3]{1-4x}$.

(c) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

(d) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-1}}$.

(e) $f(x) = e^{2x}(x^2+3x+5)$.

(f) $f(x) = x^3 \sin x$.

2. Cho hàm số $f(x) = \ln(1-3x)$. Tính $f^{(n)}(0)$.

3. Cho hàm số $f(x) = x^3 \sin 3x$. Tính $f^{(100)}(0)$.

4. Cho $y = \frac{x^4}{2-x}$. Tính $d^4 y$.

Bài 5. Các định lý giá trị trung bình và ứng dụng

1. Hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ có thỏa mãn định lý Rolle trên $[-1; 1]$ không? Tại sao?

2. Cho $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Dùng định lý Rolle, chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt trên $[1, 4]$.

3. Kiểm tra các điều kiện của định lý Lagrange đối với hàm số sau trên $[0; 3]$

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+5 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Chương 3. Tích phân

Bài 1. Tính các tích phân suy rộng

- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+3x^2+2}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^3}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$
- $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \arctg x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$
- $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$
- $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

4. Tìm điểm M trên cung \widehat{AB} của đường cong

$$y = 2x - x^2$$

sao cho tiếp tuyến tại đó song song với dây AB , với $A(1, 1)$, $B(3, -3)$.

5. Áp dụng định lý Lagrange, chứng minh rằng:

(a) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, $0 < b < a$.

(b) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$.

(c) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ với $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$.

Bài 6. Tính giới hạn

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\arctg(1+x) - \pi}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - x}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tg 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2\arctg x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+2x} - e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2014}}{e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

Bài 7. Công thức Taylor và Maclaurin

1. Khai triển Maclaurin đến cấp n của $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

2. Khai triển Maclaurin đến cấp n của $f(x) = \ln \sqrt[5]{1+2x}$.

3. Khai triển Taylor đến cấp 3 hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Bài 2. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

1. $\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$
2. $\int_0^{+\infty} x \cos x dx$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2 + \sin x}$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x\sqrt{x}} dx$
6. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
8. $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$
9. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$
10. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^p} dx$
11. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$
12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tg x}}$
13. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
14. $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{1+x-e^x}} dx$
15. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$
16. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[4]{x}} - 1}$

17. $\int_0^1 \frac{xdx}{\tg x - \sin x}$
18. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|4-x^2|}}$
19. $\int_0^1 \frac{\arctg x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
20. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin 2x} - 1} dx$
21. $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x - \sin x} dx$
22. $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{e^{\sqrt[3]{x^2}} - 1} dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$
24. $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx; \alpha > 2$
25. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$

Bài 3. Ứng dụng của tích phân xác định

1. Tính độ dài của các đường cong sau:

- (a) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e$.
- (b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$.
- (c) $r = a(1 + \cos \varphi), a > 0$.
- (d) $y = \arcsin(e^{-x}); 0 \leq x \leq 1$
- (e) $r = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

(a) (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(b) Một cung (một nhịp) Xicloit

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

và trục Ox .

- (c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$.
- (d) $r = a(1 + \cos \varphi); 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a > 0$.
- (e) $y = x^2, y = 4x^2, y = 4$.
- (f) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

(g) $y = -\sqrt{4-x^2}$ và $x^2 + 3y = 0$.

(h) $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$.

3. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

(a) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox .

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ quanh trục Ox .

(c) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ quanh Ox .

(d) $y = x$, $x = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ quanh trục Oy .

(e) $x^2 + y^2 = 4x - 3$ quanh trục Oy .

(f) $y^2 + x = 9$ và $x = 0$ quanh trục Oy .

4. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt Elípôit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5. Tính thể tích hình cầu: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $R > 0$.

12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{2n^5 + 3n}}$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$

14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n^2 + n + 1)}$

16. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^k n}$

17. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3n+2}{2n+7}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n^3}$

20. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Chương 4. Chuỗi

Bài 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n^2 + 2}$

3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 1}$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot 2^{n-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^5 + n)}{\sqrt{n^5 + n}}$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{3n} - \sin \frac{1}{3n}\right)$

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 3^n}$

Bài 2. Xét sự hội tụ tuyệt đối, hội tụ tương đối

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n^2 + 1)}$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n^2}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n^2}\right)$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

Bài 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n \arcsin^n x}{\pi^n (n+1)}$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln x)^n}{2n+1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} e^{nx}$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln x)^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$$

$$7. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin^n x}{(n+1)^2}$$

$$9. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (\sin x)^n}{n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln^n x}$$

$$11. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$$

$$12. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

$$13. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2x-3)^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$$

$$16. \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

$$17. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n\pi^n} x^n$$

$$18. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} x^n$$

$$19. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n^2}\right) x^n$$

$$20. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(2n+1)}$$

$$21. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(2n+1)}$$

$$22. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Bài 4. Tìm miền hội tụ và tính tổng

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n x^{n+1}$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+2}$$

$$4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n+1}$$

$$7. \sum_{n=1}^{+\infty} (2^n - n) x^{n+1}$$

$$8. \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) x^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$10. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}$$

$$11. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$$

Bài 5. Chuỗi Fourier

1. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , trong đó $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

2. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2π , trong đó $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

3. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , trong đó $f(x) = x^2$ khi $x \in [-\pi, \pi]$. Áp dụng tính tổng các chuỗi số

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

4. Khai triển hàm $f(x) = |\cos x|$ thành chuỗi Fourier.

5. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2l = 2$, trong đó $f(x) = x^2$ khi $x \in [-1, 1]$.

6. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2π , trong đó $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

7. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , trong đó $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -\pi < x \leq 0 \\ 1-x & \text{nếu } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

8. Khai triển hàm $f(x) = 2x - 1$ thành chuỗi Fourier trên đoạn $[0, \pi]$ chỉ chứa sin.

9. Khai triển hàm $f(x) = x + 1$ thành chuỗi Fourier trên đoạn $[0, \pi]$ chỉ chứa cos.

10. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Hãy khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier

(a) chỉ chứa sin.

(b) chỉ chứa cos.