# CHƯƠNG 13 : GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

## §1.BÀI TOÁN CAUCHY

Một phương trình vi phân cấp 1 có thể viết dưới dạng giải được $y' = f(x,y)$ mà ta có thể tìm được hàm y từ đạo hàm của nó.Tồn tại vô số nghiệm thoả mãn phương trình trên.Mỗi nghiệm phụ thuộc vào một hằng số tuỳ ý.Khi cho trước giá trị ban đầu của y là $y_o$ tại giá trị đầu $x_o$ ta nhận được một nghiệm riêng của phương trình.Bài toán Cauchy ( hay bài toán có điều kiện đầu) tóm lại như sau : cho x sao cho $b \geq x \geq a$,tìm y(x) thoả mãn điều kiện :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

Người ta chứng minh rằng bài toán này có một nghiệm duy nhất nếu f thoả mãn điều kiện Lipschitz :

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \leq L \left| y_1 - y_2 \right|$$

với L là một hằng số dương.

Người ta cũng chứng minh rằng nếu $f'_y$ ( đạo hàm của f theo y ) là liên tục và bị chặn thì f thoả mãn điều kiện Lipschitz.

Một cách tổng quát hơn,người ta định nghĩa hệ phương trình bậc 1 :

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Ta phải tìm nghiệm $y_1,y_2,\dots,y_n$ sao cho :

$$\begin{cases} Y'(x) = f(x,Y) \\ Y(a) = \alpha \end{cases}$$

với :

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ . \\ y'_n \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

Nếu phương trình vi phân có bậc cao hơn (n),nghiệm sẽ phụ thuộc vào n hằng số tuỳ ý.Để nhận được một nghiệm riêng,ta phải cho n điều kiện đầu.Bài toán sẽ có giá trị đầu nếu với giá trị $x_o$ đã cho ta cho $y(x_o),y'(x_o),y''(x_o),\dots$.

Một phương trình vi phân bậc n có thể đưa về thành một hệ phương trình vi phân cấp 1.Ví dụ nếu ta có phương trình vi phân cấp 2 :

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(a) = \alpha \;, \quad y'(a) = \beta \end{cases}$$

Khi đặt u = y và v = y′ ta nhận được hệ phương trình vi phân cấp 1 :

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = g(x,u,v) \end{cases}$$

tới điều kiện đầu : $u(a) = \alpha$ và $v(a) = \beta$

Các phương pháp giải phương trình vi phân được trình bày trong chương này là các phương pháp rời rạc : đoạn [a,b] được chia thành n đoạn nhỏ bằng nhau được gọi là các "bước" tích phân h = ( b - a) / n.

## §2.PHƯƠNG PHÁP EULER VÀ EULER CẢI TIẾN

Giả sử ta có phương trình vi phân :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

và cần tìm nghiệm của nó.Ta chia đoạn $[x_o,x\,]$ thành n phần bởi các điểm chia :

$$x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x$$

Theo công thức khai triển Taylor một hàm lân cận $x_i$ ta có :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 y''(x_i)}{2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 y'''(x_i)}{6} + \cdots$$

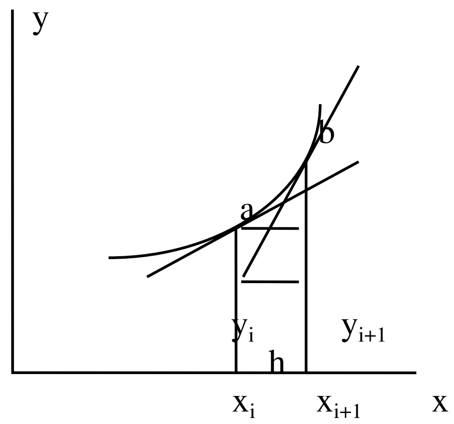
Nếu $(x_{i+1} - x_i)$ khá bé thì ta có thể bỏ qua các số hạng $(x_{i+1} - x_i)^2$ và các số hạng bậc cao

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\, y'(x_i)$$

Trường hợp các mốc cách đều : $(x_{i-1} - x_i) = h = (x - x_o)/\, n$ thì ta nhận được công thức Euler đơn giản :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i) \qquad (2)$$

Về mặt hình học ta thấy (1) cho kết quả càng chính xác nếu bước h càng nhỏ.Để tăng độ chính xác ta có thể dùng công thức Euler cải tiến.Trước hết ta nhắc lại định lí Lagrange:




*Giả sử f(x) là hàm liên tục trong[a,b] và khả vi trong (a,b)thì có ít nhất một điểm c∈(a,b) để cho :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Theo định lí Lagrange ta có :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(c_i, y(c_i))$$

Như vậy với $c \in (x_i,x_{i+1})$ ta có thể thay :

$$f(c_i, y(c_i)) = \frac{1}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

Từ đó ta có công thức Euler cải tiến :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1})] \qquad (3)$$

Trong công thức này giá trị $y_{i+1}$ chưa biết.Do đó khi đã biết $y_i$ ta phải tìm $y_{i+1}$ bằng cách giải phương trình đại số tuyến tính (3).Ta thường giải (3) bằng cách lặp như sau:trước hết chọn xấp xỉ đầu tiên của phép lặp $y_{i+1}^{(0)}$ chính là giá trị $y_{i+1}$ tính được theo phương pháp Euler sau đó dùng (3) để tính các $y_{i+1}^{(s)}$,cụ thể là :

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1}^{(s)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(s-1)})\right]$$

Quá trình tính kết thúc khi $y_i^{(s)}$ đủ gần $y_i^{(s-1)}$
Chương trình giải phương trình vi phân theo phương pháp Euler như sau :

***Chương trình 13-1***

```
//pp_Euler;
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

float f(float x,float y)
  {
        float a=x+y;
        return(a);
  }

void main()
  {
    int i,n;
        float a,b,t,z,h,x0,y0,c1,c2;
        float x[100],y[100];

        clrscr();
        printf("Cho can duoi a = ");
        scanf("%f",&a);
        printf("Cho can tren b = ");
        scanf("%f",&b);
        printf("Cho so buoc tinh n = ");
        scanf("%d",&n);
        printf("Cho so kien x0 = ");
        scanf("%f",&x0);
        printf("Cho so kien y0 = ");
        scanf("%f",&y0);
        printf("\n");
        printf("Bang ket qua\n");
        printf("\n");
        printf("Phuong phap Euler\n");
        h=(b-a)/n;
        x[1]=x0;
        y[1]=y0;
        printf("  x           y");
        printf("\n");
        for (i=1;i<=n+1;i++)
          {
                x[i+1]=x[i]+h;
                y[i+1]=y[i]+h*f(x[i],y[i]);
                printf("%3.2f%16.3f",x[i],y[i]);
                printf("\n");
          }
```

```
        printf("\n");
        getch();
        printf("Phuong phap Euler cai tien\n");
        printf("  x           y");
        printf("\n");
        for (i=1;i<=n+1;i++)
          {
                x[i+1]=x[i]+h;
                c1=h*f(x[i],y[i]);
                c2=h*f(x[i]+h,y[i]+c1);
                y[i+1]=y[i]+(c1+c2)/2;
                printf("%3.2f%15.5f",x[i],y[i]);
                printf("\n");
          }
        getch();
  }
```

Với phương trình cho trong function và điều kiện đầu $x_o = 0, y_o = 0$, nghiệm trong đoạn [0,1] với 10 điểm chia là :

| x | y(Euler) | y(Euler cải tiến) |
|---|---|---|
| 0.0 | 0.00 | 0.00 |
| 0.1 | 0.00 | 0.01 |
| 0.2 | 0.01 | 0.02 |
| 0.3 | 0.03 | 0.05 |
| 0.4 | 0.06 | 0.09 |
| 0.5 | 0.11 | 0.15 |
| 0.6 | 0.17 | 0.22 |
| 0.7 | 0.25 | 0.31 |
| 0.8 | 0.34 | 0.42 |
| 0.9 | 0.46 | 0.56 |
| 1.0 | 0.59 | 0.71 |

## §3.PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA

Xét bài toán Cauchy (1).Giả sử ta đã tìm được giá trị gần đúng $y_i$ của $y(x_i)$ và muốn tính $y_{i+1}$ của $y(x_{i+1})$.Trước hết ta viết công thức Taylor :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x_i) + \frac{h^{(m+1)}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(c) \qquad (11)$$

với $c \in (x_i, x_{i+1})$ và :

$$y'(x_i) = f[x_i, y(x_i)]$$

$$y^{(k)}(x_i) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[f(x, y(x)]_{x=x_i}$$

Ta viết lại (11) dưới dạng :

$$y_{i+1} - y_i = hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i + \dots + \frac{h^m}{m!}y_i^{(m)} + \frac{h^{(m+1)}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(c) \qquad (12)$$

Ta đã kéo dài khai triển Taylor để kết quả chính xác hơn.Để tính $y'_i, y''_i$ v.v.ta có thể dùng phương pháp Runge-Kutta bằng cách đặt :

$$y_{i+1} - y_i = r_1k_1^{(i)} + r_2k_2^{(i)} + r_3k_3^{(i)} + \dots + r_sk_s^{(i)} \qquad (13)$$

trong đó :

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf(x_i + ah\ , y_i + \alpha k_1^{(i)}) \\ k_3^{(i)} = hf(x_i + bh\ , y_i + \beta k_1^{(i)} + \gamma k_2^{(i)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (14)$$

và ta cần xác định các hệ số a,b,..;$\alpha,\beta,\gamma$,...; $r_1,r_2$,..sao cho vế phải của (13) khác với vế phải của (12) một vô cùng bé cấp cao nhất có thể có đối với h.

Khi dùng công thức Runge-Kutta bậc hai ta có :

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf(x_i + ah\ , y_i + \alpha k_1^{(i)}) \end{cases} \qquad (15)$$

và $$y_{i+1} - y_i = r_1k_1^{(i)} + r_2k_2^{(i)} \qquad (16)$$

Ta có : $y'(x) = f[x,y(x)]$

$y''(x) = f'_x[x, y(x)] + f'_y[x, y(x)]y'(x)$

................

Do đó vế phải của (12) là :

$$hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)\ y'(x)] + \dots \qquad (17)$$

Mặt khác theo (15) và theo công thức Taylor ta có :

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) = hy'_i$$

$$k_2^{(i)} = h[f(x_i, y_i) + ahf'_x(x_i, y_i) + \alpha k_1^{(i)} f'_y(x_i, y_i) + \dots]$$

Do đó vế phải của (16) là :

$$h(r_1 + r_2)f(x_i, y_i) + h^2[ar_2f'_x(x_i, y_i) + \alpha r_2 y'_i f'_x(x_i, y_i)] + \dots \qquad (18)$$

Bây giờ cho (17) và (18) khác nhau một vô cùng bé cấp $O(h^3)$ ta tìm được các hệ số chưa biết khi cân bằng các số hạng chứa h và chứa $h^2$ :

$r_1 + r_2 = 1$

$a.r_1 = 1/2$

$\alpha.r_2 = 1$

Như vậy : $\alpha = a, r_1 = (2a - 1)/2a, r_2 = 1/2a$ với a được chọn bất kì.

Nếu a = 1 / 2 thì $r_1 = 0$ và $r_2 = 1$.Lúc này ta nhận được công thức Euler.Nếu a = 1 thì $r_1 = 1/2$ và $r_2 = 1/2$.Lúc này ta nhận được công thức Euler cải tiến.

Một cách tương tự chúng ta nhận được công thức Runge - Kutta bậc 4.Công thức này hay được dùng trong tính toán thực tế :

$k_1 = h.f(x_i,y_i)$

$k_2 = h.f(x_i+h/2, y_i + k_1/2)$

$k_3 = h.f(x_i+h/2, y_i + k_2/2)$

$k_4 = h.f(x_i+h, y_i + k_3)$

$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$

Chương trình giải phương trình vi phân bằng công thức Runge - Kutta bậc 4 như sau :

***Chương trình 11-2***

//Phuong phap Runge_Kutta;

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define k 10

float f(float x,float y)
  {
        float a=x+y;
        return(a);
  }

void main()
  {
        float a,b,k1,k2,k3,k4;
        int i,n;
        float x0,y0,h,e;
        float x[k],y[k];

        clrscr();
        printf("Phuong phap Runge - Kutta\n");
        printf("Cho can duoi a = ");
        scanf("%f",&a);
        printf("Cho can tren b = ");
        scanf("%f",&b);
        printf("Cho so kien y0 = ");
        scanf("%f",&y[0]);
        printf("Cho buoc tinh h = ");
        scanf("%f",&h);
        n=(int)((b-a)/h);
        printf("        x           y\n");
        for (i=0;i<=n+1;i++)
          {
                x[i]=a+i*h;
                k1=h*f(x[i],y[i]);
                k2=h*f((x[i]+h/2),(y[i]+k1/2));
                k3=h*f((x[i]+h/2),(y[i]+k2/2));
                k4=h*f((x[i]+h),(y[i]+k3));
                y[i+1]=y[i]+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
                printf("%12.1f%16.4f\n",x[i],y[i]);
          }
        getch();
  }
```

Kết quả tính toán với $f = x + y, h = 0.1, a = 0, b = 1, y_o = 1$ là :

| x | y |
|---|---|
| 0.0 | 1.0000 |
| 0.1 | 1.1103 |
| 0.2 | 1.2427 |
| 0.3 | 1.3996 |
| 0.4 | 1.5834 |

| | |
|---|---|
| 0.5 | 1.7971 |
| 0.6 | 2.0440 |
| 0.7 | 2.3273 |
| 0.8 | 2.6508 |
| 0.9 | 3.0190 |
| 1.0 | 3.4362 |