CHƯƠNG 11 : NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

§1.NỘI SUY LAGRANGE

Trong thực tế nhiều khi phải phục hồi một hàm y = f(x) tại mọi giá trị x trong một đoạn [a,b] nào đó mà chỉ biết một số nhất định các giá trị của hàm tại một số điểm cho trước.Các giá trị này được cung cấp qua thực nghiệm hay tính toán.Vì vậy nảy sinh vấn đề toán học là trên đoạn $a \le x \le b$ cho một loạt các điểm x_i (i= 0,1,2..) và tại các điểm x_i này giá trị của hàm là $y_i = f(x_i)$ đã biết.Bây giờ ta cần tìm đa thức :

$$P_n(x) = a_ox^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

sao cho $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$.Đa thức $P_n(x)$ được gọi là đa thức nội suy của hàm y = f(x).Ta chọn đa thức để nội suy hàm y = f(x) vì đa thức là loại hàm đơn giản,luôn có đạo hàm và nguyên hàm.Việc tính giá trị của nó theo thuật toán Horner cũng đơn giản.

Bây giờ ta xây dựng đa thức nội suy kiểu Lagrange.Gọi L_i là đa thức :

$$L_i = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Rõ ràng là $L_i(x)$ là một đa thức bậc n và :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$$

Ta gọi đa thức này là đa thức Lagrange cơ bản.

Bây giờ ta xét biểu thức :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

Ta thấy $P_n(x)$ là một đa thức bậc n vì các $L_i(x)$ là các đa thức bậc n và thoả mãn điều kiện $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$.Ta gọi nó là đa thức nội suy Lagrange.

Với n = 1 ta có bảng

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

Đa thức nội suy sẽ là :

$$P_1(x) = y_oL_0(x) + y_1L_1(x_1)$$

$$L_0 = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \qquad L_1 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

nên $$P_1(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Như vậy $P_1(x)$ là một đa thức bậc nhất đối với x

Với n = 2 ta có bảng

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Đa thức nội suy sẽ là :

$$P_2(x) = y_oL_0(x) + y_1L_1(x_1) + y_2L_2(x_2)$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Như vậy $P_1(x)$ là một đa thức bậc hai đối với x

Trên cơ sở thuật toán trên ta có chương trình tìm đa thức nội suy của một hàm khi cho trước các điểm và sau đó tính trị số của nó tại một giá trị nào đó như sau :

Chương trình 11-1

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#define max   21

int maxkq,n;
float x[max],y[max],a[max],xx[max],yy[max];
float x0,p0;

void main()
  {
        int i,k;
        char ok ;

        void vaosolieu(void);
        float lagrange(int,float [],float [],float);
        void inkq(void);

        clrscr();
        printf("%24cNOI SUY DA THUC LAGRANGE\n",' ');
        vaosolieu();
        k=0;
        ok='c';
        while (ok=='c')
          {
                printf("Tinh gia tri cua y voi x la x0 = ");
                scanf("%f",&x0);
                p0=lagrange(n,x,y,x0);
                printf("Gia tri cua y = %15.5f\n",p0);
                printf("\n");
                k=k+1;
                maxkq=k;
                xx[k]=x0;
                yy[k]=p0;
                flushall();
                printf("Tinh tiep khong(c/k)?");
                scanf("%c",&ok);
          }
        inkq();
```

```
  }

void vaosolieu()
  {
	int i,t;
	char ok;

	printf("\n");
	printf("Ham y = f(x)\n");
	printf("So cap (x,y) nhieu nhat la max = 20\n");
	printf("So diem da cho truoc n = ");
	scanf("%d",&n);
	for (i=1;i<=n;i++)
	  {
		printf("x[%d] = ",i);
		scanf("%f",&x[i]);
		printf("y[%d] = ",i);
		scanf("%f",&y[i]);
	  }
	printf("\n");
	printf("     SO LIEU BAN VUA NHAP\n");
	printf("        x              y\n");
	for (i=1;i<=n;i++)
	  printf("%8.4f          %8.4f\n",x[i],y[i]);
	ok=' ';
	t=1;
	flushall();
	while (t)
	  {
		printf("\nCo sua so lieu khong(c/k):?");
		scanf("%c",&ok);
		if (toupper(ok)=='C')
		  {
			printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
			scanf("%d",&i);
			printf("Gia tri moi : ");
			printf("x[%d] = ",i);
			scanf("%f",&x[i]);
			printf("y[%d] = ",i);
			scanf("%f",&y[i]);
			flushall();
		  }
		if (toupper(ok)!='C')
		  t=0;
	  }
  }

float lagrange(int n,float x[max],float y[max],float x0)
  {
	int i,k;
```

```
        float g0;

        p0=0.0;
        for (k=1;k<=n;k++)
          {
                g0=1.0;
                for (i=1;i<=n;i++)
                  if (i!=k)
                        g0=g0*(x0-x[i])/(x[k]-x[i]);
                  p0=p0+y[k]*g0;
          }
        return(p0);
  }

void inkq()
  {
        int i,j,k;
        printf("\n");
        printf("%24cBANG SO LIEU\n",' ');
        printf("%18cx %24cy\n",' ',' ');
        for (i=1;i<=n;i++)
          printf("%20.4f %25.4f\n",x[i],y[i]);
        printf("\n");
        printf("%24cKET QUA TINH TOAN\n",' ');
        printf("%14cx %10cy\n",' ',' ');
        for (k=1;k<=maxkq;k++)
          printf("%15.5f %15.5f\n",xx[k],yy[k]);
        getch();
  }
```

Giả sử ta có bảng các giá trị x,y :

x	0	3	-2	2	4
y	0	-3.75	10	-2	4

vậy theo chương trình tại x = 2.5 y = -3.3549.

§2.NỘI SUY NEWTON

Bây giờ ta xét một cách khác để xây dựng đa thức nội suy gọi là phương pháp Newton.Trước hết ts đưa vào một khái niệm mới là tỉ hiệu

Giả sử hàm y = y(x) có giá trị cho trong bảng sau :

x	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Tỉ hiệu cấp 1 của y tại x_i,x_j là :

$$y[x_i, x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

Tỉ hiệu cấp hai của y tại x_i,x_j,x_k là :

$$y[x_i, x_j, x_k] = \frac{y[x_i, x_j] - y[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

v.v.

Với $y(x) = P_n(x)$ là một đa thức bậc n thì tỉ hiệu cấp 1 tại x,x_0 :

$$P_n[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0}$$

là một đa thức bậc (n-1).Tỉ hiệu cấp 2 tại x,x_0,x_1 :

$$P_n[x, x_0, x_1] = \frac{P_n[x, x_0] - P_n[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

là một đa thức bậc (n-2) v.v và tới tỉ hiệu cấp (n+1) thì :

$$P_n[x, x_o, .., x_n] = 0$$

Từ các định nghĩa tỉ hiệu ta suy ra :

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x, x_o]$$
$$P_n[x, x_0] = P_n[x_0, x_1] + (x - x_1)P_n[x, x_o, x_1]$$
$$P_n[x, x_o, x_1] = P_n[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)P_n[x, x_o, x_1, x_2]$$
....
$$P_n[x, x_o, .., x_{n-1}] = P_n[x_0, x_1, .., x_n] + (x - x_n)P_n[x, x_o, .., x_n]$$

Do $P_n[x, x_o, .., x_n] = 0$ nên từ đó ta có :

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x_o, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)P_n[x_0, x_1, x_2] + \ldots$$
$$+ (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})P_n[x_0, \ldots, x_n]$$

Nếu $P_n(x)$ là đa thức nội suy của hàm $y=f(x)$ thì :

$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$ với $i = 0 \div n$

Do đó các tỉ hiệu từ cấp 1 đến cấp n của P_n và của y là trùng nhau và như vậy ta có :

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)y[x_0, x_1, x_2] + .. +$$
$$(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})y[x_0, .., x_n]$$

Đa thức này gọi là đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 của hàm $y = f(x)$.Ngoài đa thức tiến còn có đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ điểm x_n có dạng như sau :

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n)y[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1})y[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + .. +$$
$$(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)y[x_n, .., x_0]$$

Trường hợp các nút cách đều thì $x_i = x_0 + ih$ với i = 0,1,..,n.Ta gọi sai phân tiến cấp 1 tại i là :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

và sai phân tiến cấp hai tại i :

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

....

và sai phân tiến cấp n là :

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i)$$

Khi đó ta có :

$$y[x_0, x_1] = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

....

$$y[x_0,\dots,x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{(n!h^n)}$$

Bây giờ đặt $x = x_0 + ht$ trong đa thức Newton tiến ta được :

$$P_n(x_0+ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

thì ta nhận được đa thức Newton tiến xuất phát từ x_0 trong trường hợp nút cách đều.Với n =1 ta có :

$$P_1(x_0+ht) = y_0 + \Delta y_0$$

Với n =2 ta có :

$$P_2(x_0+ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

Một cách tương tự ta có khái niệm các sai phân lùi tại i :

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$
$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$
....
$$\nabla^n y_i = \nabla(\nabla^{n-1} y_i)$$

và đa thức nội suy Newton lùi khi các điểm nội suy cách đều :

$$P_n(x_0+ht) = y_n + t\nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n$$

Ví dụ : Cho hàm như bảng sau :

x	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.09983	0.19867	0.29552	0.38942

Ta tính giá trị của hàm tại 0.14 bằng đa thức nội suy Newton vì các mốc cách đều h = 0.1.Ta có bảng sai phân sau :

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0.1	0.09983			
			0.09884		
1	0.2	0.19867		-0.00199	
			0.09685		-0.00096
2	0.3	0.29552		-0.00295	
			0.09390		
3	0.4	0.38942			

Ta dùng công thức Newton tiến với điểm gốc là $x_0 = 0.1$.h = 0.1.Với x = 0.14 ta có 0.14 = 0.1 + 0.1t nên t = 0.4 và kết quả là :

$$P(0.1+0.1t) = 0.09983 + t.0.099884 + \frac{t(t-1)}{2!}0.00199 - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}0.00096 = 0.13954336$$Chương trình nội suy Newton như sau :

Chương trình 11-2

```
//Noi suy Newton
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#define max   11

void main()
  {
	int i,j,k,n,t;
	float a[max],b[max],x[max],y[max];
	char ok;
	float x0,p;

	clrscr();
	printf("So diem da cho n = ");
	scanf("%d",&n);
	for (i=1;i<=n;i++)
	  {
		printf("x[%d] = ",i);
		scanf("%f",&x[i]);
		printf("y[%d] = ",i);
		scanf("%f",&y[i]);
	  }
	printf("%10cBANG SO LIEU\n",' ');
	printf("%8cx%30cy\n",' ',' ');
	for (i=1;i<=n;i++)
	  printf("%4c%8.4f%23c%8.4f\n",' ',x[i],' ',y[i]);
	ok=' ';
	t=0;
	flushall();
	while (t)
	  {
		printf("Co sua so lieu khong(c/k): ");
		scanf("%c",&ok);
		if (toupper(ok)=='C')
		  {
			printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
			scanf("%d",&i);
			printf("Gia tri moi : ");
			printf("x[%d] = ",i);
			scanf("%f",&x[i]);
			printf("y[%d] = ",i);
			scanf("%f",&y[i]);
			flushall();
		  }
		if (toupper(ok)!='C')
		  t=0;
	  }
	a[1]=y[1];
	for (j=1;j<=n-1;j++)
```

```
    {
        for (i=1;i<=n-j;i++)
          y[i]=(y[i+1]-y[i])/(x[i+j]-x[i]);
        a[j+1]=y[1];
    }
  b[n]=a[n];
  for (k=n-1;k>=1;k--)
    {
        for (j=n-1;j>=1;j--)
          b[j]=a[j] ;
        for (i=n-1;i>=k;i--)
          a[i]=a[i]-b[i+1]*x[k];
    }
  for (i=n;i>=1;i--)
    printf("He so bac %d la :%8.4f\n",i-1,a[i]);
  printf("\n");
  k=0;
  ok='c';
  flushall();
  while (ok=='c')
    {
        printf("Tinh gia tri cua y tai x = ");
        scanf("%f",&x0);
        p=0;
        for (k=n;k>=1;k--)
          p=p*x0+a[k];
        printf("Tri so noi suy tai x0 = %4.2f la : %10.5f\n",x0,p);
        getch();
        printf("Ban co muon tinh tiep cac diem khac khong(c/k)");
        do
          scanf("%c",&ok);
        while ((ok!='c')&&(ok!='k'));
    }
}
```

Dùng chương trình này nội suy các giá trị cho trong bảng sau

0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	1.2214027 6	1.4918247	1.8221188	2.2255409 3	2.7182818 3

ta có các hệ số của đa thức nội suy : 0.0139(bậc 5),0.0349(bậc 4),0.1704(bậc3),0.4991(bậc 2),1.0001(bậc 1) và 1.0000(bậc 0).

§3.NỘI SUY AITKEN

Một dạng khác của đa thức nội suy được xác định bằng thuật toán Aitken.Giả sử ta có n điểm đã cho của hàm f(x).Như vậy qua hai điểm x_0 và x_1 ta có đa thức nội suy Lagrange của hàm f(x) được viết dưới dạng :

$$P_{01}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0}$$

là một đa thức bậc 1 :

$$P_{01}(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

.Khi $x = x_0$ thì :

$$P_{01}(x_0)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x_0 \\ y_1 & x_1-x_0 \end{vmatrix}}{x_1-x_0}=y_0$$

Khi $x = x_1$ thì :

$$P_{01}(x_1)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x_1 \\ y_1 & x_1-x_1 \end{vmatrix}}{x_1-x_0}=y_1$$

Đa thức nội suy Lagrange của f(x) qua 3 điểm x_0,x_1,x_2 có dạng :

$$P_{012}(x)=\frac{\begin{vmatrix} P_{01}(x) & x_0-x \\ P_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}$$

và là một đa thức bậc 2:

$$P_{012}(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Khi $x = x_0$ thì :

$$P_{012}(x_0)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x_0 \\ P_{12}(x) & x_2-x_0 \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=y_0$$

Khi $x = x_1$ thì :

$$P_{012}(x_1)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_0-x_1 \\ y_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=y_1$$

Khi $x = x_2$ thì :

$$P_{012}(x_2)=\frac{\begin{vmatrix} P_{01}(x_2) & x_0-x_2 \\ y_2 & x_2-x_2 \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=y_2$$

Tổng quát đa thức nội suy Lagrange qua n điểm là :

$$P_{012..n}(x)=\frac{\begin{vmatrix} P_{01..(n-1)}(x) & x_0-x \\ P_{12..n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}$$

Như vậy ta có thể dùng phép lặp để xác định lần lượt các đa thức Lagrange.Sơ đồ tính toán như vậy gọi là sơ đồ Neville-Aitken.

Ví dụ : Cho các cặp điểm (0,0.4),(1.4,1.5),(2.6,1.8),(3.9,2.6),tính y tại x=2

$$P_{01}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} 0.4 & -2 \\ 1.5 & -0.6 \end{vmatrix}}{1.4-0}=1.97143$$

$$P_{12}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1}=\frac{\begin{vmatrix} 1.5 & -0.6 \\ 1.8 & 0.6 \end{vmatrix}}{2.6-1.4}=1.65$$

$$P_{012}(x)=\frac{\begin{vmatrix} P_{01}(x) & x_0-x \\ P_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} 1.97143 & -2 \\ 1.65 & 0.6 \end{vmatrix}}{2.6-0}=1.7242$$

$$P_{23}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_2 & x_2-x \\ y_3 & x_3-x \end{vmatrix}}{x_3-x_2}=\frac{\begin{vmatrix} 1.8 & 0.6 \\ 2.6 & 1.9 \end{vmatrix}}{3.9-2.6}=1.4308$$

$$P_{123}(x)=\frac{\begin{vmatrix} P_{12}(x) & x_1-x \\ P_{23}(x) & x_3-x \end{vmatrix}}{x_3-x_1}=\frac{\begin{vmatrix} 1.65 & -0.6 \\ 1.4308 & 1.9 \end{vmatrix}}{3.9-1.4}=1.5974$$

$$P_{0123}(x)=\frac{\begin{vmatrix} P_{012}(x) & x_0-x \\ P_{123}(x) & x_3-x \end{vmatrix}}{x_3-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} 1.7242 & -2 \\ 1.5974 & 1.9 \end{vmatrix}}{3.9-0}=1.6592$$

Chương trình được viết như sau

Chương trình 11-3

```
//Noi suy Aitken
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#define max   11

void main()
  {
        float x[max],y[max],yd[max];
        float x1;
        int j,k,n,n1;

        clrscr();
        printf("Cho so diem da co n = ");
        scanf("%d",&n1);
        n=n1-1 ;
        for (k=0;k<=n;k++)
          {
                printf("x[%d] = ",k+1);
                scanf("%f",&x[k]);
                printf("y[%d] = ",k+1);
                scanf("%f",&y[k]);
          }
        printf("Cho diem can tinh gia tri cua ham x1 = ");
```

```
        scanf("%f",&x1);
        for (k=0;k<=n-1;k++)
          {
                yd[k]=(y[k]*(x1-x[k+1])-y[k+1]*(x1-x[k]))/(x[k]-x[k+1]);
                if (k!=0)
                for (j=k-1;j>=0;j--)
                  yd[j]=(yd[j]*(x1-x[k+1])-yd[j+1]*(x1-x[j]))/(x[j]-x[k+1]);
          }
        printf("Gia tri ham tai x = %6.3f la y = %8.4f\n",x1,yd[0]);
        getch();
  }
```

Dùng chương trình này để nội suy các cặp số (1,3),(2,5),(3,7),(4,9) và (5,11) tại x = 2.5 ta có y = 6.

§4.XẤP XỈ HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Trong các mục trước ta đã nội suy giá trị của hàm.Bài toán đó là cho một hàm dưới dạng bảng số và phải tìm giá trị của hàm tại một giá trị của đối số không nằm trong bảng.

Trong thực tế,bên cạnh bài toán nội suy ta còn gặp một dạng bài toán khác.Đó là tìm công thức thực nghiệm của một hàm.Nội dung bài toán là từ một loạt các điểm cho trước (có thể là các giá trị của một phép đo nào đó) ta phải tìm một hàm xấp xỉ các giá trị đã cho.Ta sẽ dùng phương pháp bình phương tối thiểu để giải bài toán.Giả sử có mẫu quan sát (x_i,y_i) của hàm y = f(x).Ta chọn hàm f(x) có dạng :

$$f(x) = a_0f_0(x) + a_1f_1(x) + a_2f_2(x)... \qquad (1)$$

Trong đó các hàm $f_0(x)$,$f_1(x)$,$f_2(x)$ v.v.là (m+1) hàm độc lập tuyến tính mà ta có thể chọn tuỳ ý và các hệ số a_i là tham số chưa biết mà ta phải xác định dựa vào hệ hàm đã chọn và các điểm quan sát.Sai số giữa trị đo được và trị tính theo (1) là :

$$e_i = y_i - f(x_i) \qquad (2)$$

Sai số này có thể âm hay dương tuỳ từng giá trị của y_i.Khi dùng phương pháp bình phương bé nhất ta xét bình phương của sai số tại một điểm :

$$e_i^2 = \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \qquad (3)$$

Với n điểm tổng bình phương của sai số sẽ là :

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{y_i - \left[a_0f_0(x_i) + a_1f_1(x_i) + \cdots + a_nf_n(x_i)\right]\right\}^2$$

Rõ ràng S là hàm của các giá trị cần tìm a_i.và chúng ta sẽ chọn các a_i sao cho S đạt giá trị min,nghĩa là các đạo hàm $\frac{\partial S}{\partial a_i}$ phải bằng không.Ta sẽ xét các trường hợp cụ thể.

1.Hàm xấp xỉ có dạng đa thức : Trong trường hợp tổng quát ta chọn hệ hàm xấp xỉ là một đa thức,nghĩa là :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

Vậy hàm S là :

$$S = \left(y_i - a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_mx\right)^2$$

Theo điều kiện đạo hàm $\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0$ ta nhận được hệ phương trình:

$$
\begin{cases}
a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^m + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{m-1} + \cdots + na_0 = \sum_{i=1}^{n}y_i \\
a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1} + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{m} + \cdots + a_0\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i \\
a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+2} + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1} + \cdots + a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 y_i \\
a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+3} + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+2} + \cdots + a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^3 = \sum_{i=1}^{n}x_i^3 y_i \\
\cdots \\
a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m} + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m-1} + \cdots + a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^m = \sum_{i=1}^{n}x_i^m y_i
\end{cases}
$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính.Giải nó ta nhận được các gía trị a_i.Sau đây là chương trình viết theo thuật toán trên.

Chương trình 11-4

```
//Xap xi da thuc
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#define max   11

void main()
  {
        int i,j,k,m,n,p,kp,t;
        float a[max],x[max],y[max],y1[max];
        float b[max][max];
        char ok;
        float s,sx,s1,c,d;

        clrscr();
        printf("PHUONG PHAP BINH PHUONG TOI THIEU");
        printf("\n");
        printf("Cho bac cua da thuc xap xi m = ");
        scanf("%d",&m);
        printf("So diem da cho n = ");
        scanf("%d",&n);
        for (i=1;i<=n;i++)
          {
                printf("x[%d] = ",i);
                scanf("%f",&x[i]);
                printf("y[%d] = ",i);
                scanf("%f",&y[i]);
          }
        x[0]=1;
        printf("\n");
        printf("%4cBANG SO LIEU\n",' ');
```

```
printf("%8cx%30cy\n",' ',' ');
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%4c%8.4f%20c%8.4f\n",' ',x[i],' ',y[i]);
ok=' ';
t=1;
flushall();
while (t)
  {
	printf("Co sua so lieu khong(c/k): ");
	scanf("%c",&ok);
	if (toupper(ok)=='C')
	  {
		printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
		scanf("%d",&i);
		printf("Gia tri moi : ");
		printf("x[%d] = ",i);
		scanf("%f",&x[i]);
		printf("y[%d] = ",i);
		scanf("%f",&y[i]);
		flushall();
	  }
	if (toupper(ok)!='C')
	  t=0;
  }
//for (i=0;i<=n;i++)
  //a[i]=0.0;
printf("\n");
printf("CAC GIA TRI DA CHO");
printf("\n");
printf("X = ");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f",' ',x[i]);
printf("\n");
printf("Y = ");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f",' ',y[i]);
printf("\n");
for (p=0;p<=m;p++)
  {
	y1[p]=0.0;
	for (i=1;i<=n;i++)
	  {
		sx=1.0;
		for (j=1;j<=p;j++)
		  sx*=x[i];
		y1[p]+=y[i]*sx;
	  }
  }
for (p=0;p<=m;p++)
  for (k=0;k<=m;k++)
```

```
            {
             kp=k+p;
             b[p][k]=0.0;
             for (i=1;i<=n;i++)
                   {
                    sx=1.0;
                    for (j=1;j<=kp;j++)
                          sx*=x[i];
                    b[p][k]+=sx;
                   }
            }
      for (i=0;i<=m-1;i++)
        {
            c=1.0/b[i][i];
            for (k=i+1;k<=m;k++)
              {
                   d=b[i][k];
                   for (j=i+1;j<=m;j++)
                     b[k][j]-=b[i][j]*c*d;
                   y1[k]-=y1[i]*c*d;
                   b[i][k]*=c;
              }
            y1[i]*=c;
        }
      y1[m]/=b[m][m];
      for (i=m-1;i>=0;i--)
        for (j=i+1;j<=m;j++)
            y1[i]-=b[i][j]*y1[j];
      printf("\n");
      printf("CAC HE SO CUA DA THUC CAN TIM");
      printf("\n");
      for (i=0;i<=m;i++)
        printf("a[%d] = %10.5f\n",i,y1[i]);
      getch();
 }
```

Với các giá trị x,y đo được theo bảng

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

ta có n = 7 và chọn m = 2 và tính được theo chương trình các hệ số :

$a_0 = -0.111905$; $a_1 = 2.545238$; $a_2 = -4.857143$

và hàm xấp xỉ sẽ là : $f(x) = -0.111905 + 2.545238x -4.857143x^2$

2.Hàm dạng Ae^{cx} : Khi các số liệu thể hiện một sự biến đổi đơn điệu ta dùng hàm xấp xỉ là $y = Ae^{cx}$.Lấy logarit hai vế ta có :

$$\ln y = \ln A + cx\ln e$$

Theo điều kiện đạo hàm $\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} c\sum_{i=1}^{n} x_i + n\ln A = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ln A\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có các hệ số A và c :

Chương trình 11-5

```
//xap_xi_e_mu;
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>
#define max   11
void main()
  {
        int i,n,t;
        float x[max],y[max];
        char ok;
        float a,b,c,d,e,f,d1,d2,d3;

        clrscr();
        printf("PHUONG PHAP BINH PHUONG TOI THIEU");
        printf("\n");
        printf("So diem da cho n = ");
        scanf("%d",&n);
        for (i=1;i<=n;i++)
          {
                printf("x[%d] = ",i);
                scanf("%f",&x[i]);
                printf("y[%d] = ",i);
                scanf("%f",&y[i]);
          }
        x[0]=1.0;
        printf("%4cBANG SO LIEU\n",' ');
        printf("%8cx%30cy\n",' ',' ');
        for (i=1;i<=n;i++)
          printf("%4c%8.4f%23c%8.4f\n",' ',x[i],' ',y[i]);
        ok=' ';
        t=1;
        while (t)
          {
                printf("Co sua so lieu khong(c/k): ");
                scanf("%c",&ok);
                if (toupper(ok)=='C')
                  {
```

```
                printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
                scanf("%d",&i);
                printf("Gia tri moi : ");
                printf("x[%d] = ",i);
                scanf("%f",&x[i]);
                printf("y[%d] = ",i);
                scanf("%f",&y[i]);
            }
          if (toupper(ok)!='C')
            t=0;
      }
    printf("CAC GIA TRI DA CHO");
    printf("\n");
    printf("X = ");
    for (i=1;i<=n;i++)
      printf("%c%8.3f",' ',x[i]);
    printf("\n");
    printf("Y = ");
    for (i=1;i<=n;i++)
      printf("%c%8.3f",' ',y[i]);
    printf("\n");
    a=0.0;
    for (i=1;i<=n;i++)
      a+=x[i];
    b=n;
    c=0.0;
    for (i=1;i<=n;i++)
      c+=log(y[i]);
    d=0.0;
    for (i=1;i<=n;i++)
      d+=x[i]*x[i];
    e=0.0;
    for (i=1;i<=n;i++)
      e+=x[i]*log(y[i]);
    d1=a*a-d*b;
    d2=c*a-e*b;
    d3=a*e-c*d;
    c=d2/d1;
    a=d3/d1;
    printf("\n");
    printf("He so A = %8.4f",exp(a));
    printf(" va so mu c = %8.4",c);
    printf("\n");
    printf("\nBANG CAC GIA TRI TINH TOAN");
printf("\n");
    printf("%5cx%28cy\n",' ',' ');
    for (i=1;i<=n;i++)
      {
          printf("%8.4f%21c%8.4f\n",x[i],' ',exp(a)*exp(c*x[i]));
      }
```

```
        getch();
  }
```

Với các giá trị x,y đo được theo bảng

x	0	2	4	6	8	10	12
y	128 0	635	324	162	76	43	19

ta có n = 7 và tính được theo chương trình các hệ số : A = 1285.44 va c = -0.3476 và hàm xấp xỉ sẽ là : f(x) = 1285.44

3.Hàm dạng Ax^q : Khi các số liệu thể hiện một sự biến đổi đơn điệu ta cũng có thể dùng hàm xấp xỉ là $y = Ax^q$.Lấy logarit hai vế ta có :

$$\ln y = \ln A + q\ln x$$

Theo điều kiện đạo hàm triệt tiêu ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} q\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\ln A = \sum_{i=1}^{n}\ln y_i \\ q\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i + \ln A\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ln y_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có các hệ số A và q :

Chương trình 11-6

```
//xap_xi_x_mu;
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>
#define max   11

void main()
  {
        int i,n,t;
        float x[max],y[max];
        char ok;
        float a,b,c,d,e,f,d1,d2,d3;

        clrscr();
        printf("PHUONG PHAP BINH PHUONG TOI THIEU");
        printf("\n");
        printf("So diem da cho n = ");
        scanf("%d",&n);
        for (i=1;i<=n;i++)
          {
                printf("x[%d] = ",i);
                scanf("%f",&x[i]);
                printf("y[%d] = ",i);
                scanf("%f",&y[i]);
```

```
  }
x[0]=1.0;
printf("%4cBANG SO LIEU\n",' ');
printf("%8cx%30cy\n",' ',' ');
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%4c%8.4f%23c%8.4f\n",' ',x[i],' ',y[i]);
ok=' ';
flushall();
t=1;
while (t)
  {
          printf("Co sua so lieu khong(c/k): ");
          scanf("%c",&ok);
          if (toupper(ok)=='C')
            {
                    printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
                    scanf("%d",&i);
                    printf("Gia tri moi : ");
                    printf("x[",i,"] = ");
                    scanf("%f",&x[i]);
                    printf("y[%d] = ",i);
                    scanf("%f",&y[i]);
            }
          if (toupper(ok)!='C')
            t=0;
  }
printf("\n");
printf("\nCAC GIA TRI DA CHO");
printf("\n");
printf("X = ");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f",' ',x[i]);
printf("\n");
printf("Y = ");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f",' ',y[i]);
printf("\n");
a=0.0;
for (i=1;i<=n;i++)
a+=log(x[i]);
b=n;
c=0.0;
for (i=1;i<=n;i++)
c+=log(y[i]);
d=0.0;
for (i=1;i<=n;i++)
  d+=log(x[i])*log(x[i]);
e=0.;
for (i=1;i<=n;i++)
  e+=log(x[i])*log(y[i]);
```

```
    d1=a*a-d*b;
    d2=c*a-e*b;
    d3=a*e-c*d;
    c=d2/d1;
    a=d3/d1;
    printf("\n");
    printf("He so A = %8.4f",exp(a));
    printf("  va so mu q = %8.4f\n",c);
    printf("\n");
    printf("\nBANG CAC GIA TRI TINH TOAN\n");
    printf("%5cx%27cy\n",' ',' ');
    for (i=1;i<=n;i++)
      {
        printf("%8.4f%20c%8.4f\n",x[i],' ',exp(a)*exp(c*log(x[i])));
      }
    getch();
}
```

Với các giá trị x,y đo được theo bảng

x	1	2	4	5	6
y	7.1	27.8	62.1	110	161

ta có n = 5 và tính được theo chương trình các hệ số : A = 7.1641 và q = 1.9531 và hàm xấp xỉ sẽ là : $f(x) = 1285.44x^{1.9531}$

4.Hàm lượng giác : Khi quan hệ y=f(x) có dạng tuần hoàn ta dùng hàm xấp xỉ là tổ hợp tuyến tính của các hàm sin và cosin dạng :

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(i\omega x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \sin(i\omega x)$$

Để đơn giản trước hết ta xét hàm chỉ có một số hạng sin-cos,nghĩa là :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos\omega x + b_1 \sin\omega x$$

Hàm S sẽ có dạng :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 \cos\omega x + b_1 \sin\omega x)\right]^2$$

Theo điều kiện đạo hàm triệt tiêu ta có hệ phương trình đối với các hệ số dạng :

$$\begin{bmatrix} n & \sum\cos\omega x & \sum\sin\omega x \\ \sum\cos\omega x & \sum\cos^2\omega x & \sum\cos\omega x\sin\omega x \\ \sum\sin\omega x & \sum\cos\omega x\sin\omega x & \sum\sin^2\omega x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum y\cos\omega x \\ \sum y\sin\omega x \end{bmatrix}$$

Do :

$$\frac{\sum\sin\omega x}{n} = 0 \qquad \frac{\sum\cos\omega x}{n} = 0$$

$$\frac{\sum\sin^2\omega x}{n} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\sum\cos^2\omega x}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sum\cos\omega x\sin\omega x}{n} = 0$$

nên hệ phương trình có dạng đơn giản :

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 \\ 0 & 0 & n/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum y\cos\omega x \\ \sum y\sin\omega x \end{bmatrix}$$

Giải hệ ta có :

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} \qquad a_1 = \frac{2}{n}\sum y\cos\omega x \qquad b_1 = \frac{2}{n}\sum y\sin\omega x$$

Trong trường hợp tổng quát,một cách tương tự ta có :

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} \qquad a_i = \frac{2}{n}\sum y\cos i\omega x \qquad b_i = \frac{2}{n}\sum y\sin i\omega x$$

Chương trình tìm các hệ số a_i và b_i được thể hiện như sau :

Chương trình 11-7

```
//xap_xi_sin_cos;
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>
#define max   11
#define pi  3.15159

void main()
  {
        int i,j,m,n,t;
        float x[max],y[max],a[max],b[max];
        char ok;
        float omg,t1;

        clrscr();
        printf("PHUONG PHAP BINH PHUONG TOI THIEU");
        printf("\n");
        printf("Cho so so hang sin-cos m = ");
        scanf("%d",&m);
        printf("Cho chu ki T = ");
        scanf("%f",&t1);
        printf("So diem da cho n = ");
        scanf("%d",&n);
        for (i=1;i<=n;i++)
          {
                printf("x[%d] = ",i);
                scanf("%f",&x[i]);
                printf("y[%d] = ",i);
                scanf("%f",&y[i]);
          }
        x[0]=1.0;
        printf("%4cBANG SO LIEU\n",' ');
        printf("%8cx%30cy\n",' ',' ');
        for (i=1;i<=n;i++)
```

```
  printf("%4c%8.4f%23c%8.4f\n",' ',x[i],' ',y[i]);
ok=' ';
t=1;
flushall();
while (t)
  {
	printf("Co sua so lieu khong(c/k): ");
	scanf("%c",&ok);
	if (toupper(ok)=='C')
	  {
		printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
		scanf("%d",&i);
		printf("Gia tri moi : ");
		printf("x[%d] = ",i);
		scanf("%f",&x[i]);
		printf("y[%d] = ",i);
		scanf("%f",&y[i]);
		flushall();
	  }
	if (toupper(ok)!='C')
	  t=0;
  }
printf("\nCAC GIA TRI DA CHO\n");
printf("\n");
printf("      X           Y\n");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f%c%8.3f\n",' ',x[i],' ',y[i]);

printf("\n");
a[0]=0.0;
omg=2*pi/t1;
for (i=1;i<=n;i++)
  a[0]+=y[i];
a[0]/=n;
for (j=1;j<=m;j++)
  {
	a[j]=0.0;
	for (i=1;i<=n;i++)
	  a[j]+=y[i]*cos(j*omg*x[i]);
	a[j]=2*a[j]/n;
  }
for (j=1;j<=m;j++)
  {
	b[j]=0.0;
	for (i=1;i<=n;i++)
	  b[j]+=y[i]*sin(j*omg*x[i]);
	b[j]=2*b[j]/n;
  }
printf("\n");
printf("TAN SO GOC OMEGA = %10.5f\n",omg);
```

```
        printf("HE SO HANG\n");
        printf("a[0] = %8.4f\n",a[0]);
        printf("CAC HE SO BAC CAO\n");
        printf("%5ccos%25csin\n",' ',' ');
        for (i=1;i<=m;i++)
          printf("%8.4f%21c%6.4f\n",a[i],' ',b[i]);
        getch();
  }
```

Với hàm cho bằng bảng số :

x	0	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75	0.9	1.05	1.2	1.3
y	2.200	1.595	1.031	0.722	0.786	1.200	1.805	2.369	2.678	2.614

Chọn số hệ số sin-cos m = 1,số điểm cho trước n = 10,chu kì T = 15 ta nhận được kết quả tính $a_0 = 1.7$; $a_1 = 0.5$; $b_1 = -0.8661$ và $\omega = 4.18879$.Như vậy hàm xấp xỉ có dạng :

$$f(x) = 1.7 + 0.5\cos(4.18879x) - 0.8661\sin(4.18879x)$$

5.Hàm hữu tỉ : Khi quan hệ y = f(x) có dạng đường cong bão hoà hay dạng arctan,tan v.v ta dùng hàm xấp xỉ là hàm hữu tỉ dạng đơn giản :

$$y = \frac{ax}{b + x}$$

Lấy nghịch đảo của nó ta có :

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{1}{a}$$

Đặt 1/y = Y,1/x = X,b/a = B và 1/a = A phương trình trên sẽ có dạng :

$$Y = A + BX$$

và là một đa thức bậc một.Do vậy ta có hệ phương trình đối với các hệ số A và B là :

$$\begin{cases} nA + B\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i} \\ A\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + B\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i} \end{cases}$$

và từ đó tính được a và b.Chương trình sau mô tả thuật toán trên

Chương trình 11-.8

```
//xap xi huu_ty;
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>
#define k 11
void main()
  {
        float x[k],y[k];
        float a,b,a1,b1,c,d,e;
        int i,n,t;
```

```
char ok;

clrscr();
printf("PHUONG PHAP BINH PHUONG TOI THIEU");
printf("\n");
printf("So diem da cho n = ");
scanf("%d",&n);
for (i=1;i<=n;i++)
  {
        printf("x[%d] = ",i);
        scanf("%f",&x[i]);
        printf("y[%d] = ",i);
        scanf("%f",&y[i]);
  }
printf("%4cBANG SO LIEU\n",' ');
printf("%8cx%30cy\n",' ',' ');
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%4c%8.4f%23c%8.4f\n",' ',x[i],' ',y[i]);
ok=' ';
t=1;
flushall();
while (t)
  {
        printf("Co sua so lieu khong(c/k): ");
        scanf("%c",&ok);
        if (toupper(ok)=='C')
          {
                printf("Chi so cua phan tu can sua i = ");
                scanf("%d",&i);
                printf("Gia tri moi : ");
                printf("x[%d] = ",i);
                scanf("%f",&x[i]);
                printf("y[%d] = ",i);
                scanf("%f",&y[i]);
                flushall();
          }
        if (toupper(ok)!='C')
          t=0;
  }
printf("CAC GIA TRI DA CHO\n");
printf("\n");
printf("X = ");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f",' ',x[i]);
printf("\n");
printf("Y = ");
for (i=1;i<=n;i++)
  printf("%c%8.3f",' ' ,y[i]);
printf("\n");
a=n;
```

```
        b=0.0;
        c=0.0;
        d=0.0;
        e=0.0;
        for (i=1;i<=n;i++)
          {
                b+=1/x[i];
                c+=1/y[i];
                d+=1/(x[i]*x[i]);
                e+=1/(x[i]*y[i]);
          }
        a1=(c*d-b*e)/(a*d-b*b);
        b1=(a*e-b*c)/(a*d-b*b);
        a=1/a1;
        b=b1*a;
        printf("\n");
        printf("Cac he so cua ham huu ty\n");
        printf("a = %10.5f b = %10.5f",a,b);
        getch();
  }
```

Với dãy số liệu đã cho :

x	1	2	3	4	5
y	0.3333333	0.5	0.6	0.66666	0.7142857

ta nhận được từ chương trình trị số a = 1 và b = 2